18. En una elipse, los radios focales son las rectas que unen los focos con un punto cualquiera de ella. Hallar las ecuaciones de los radios focales correspondientes al punto (2, 3) de la elipse $3x^2 + 4y^2 = 48$.

Escribiendo esta ecuación en la forma $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ se tiene, $c = \pm\sqrt{16 - 12} = \pm 2$.

Los focos son los puntos $(\pm 2, 0)$. La ecuación del radio focal del punto (2, 0) al (2, 3) es $x - 2 = 0$ y la del (—2, 0) al (2, 3) es $y - 0 = \frac{3 - 0}{2 + 2}(x + 2)$, o bien, $3x - 4y + 6 = 0$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En cada una de las elipses siguientes hallar *a*) la longitud del semieje mayor, *b*) la longitud del semieje menor, *c*) las coordenadas de los focos, *d*) la excentricidad.

(1) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$. *Sol.* *a*) 13, *b*) 12, *c*) $(\pm 5, 0)$, *d*) $\frac{5}{13}$.

(2) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{12} = 1$. *Sol.* *a*) $2\sqrt{3}$, *b*) $2\sqrt{2}$, *c*) $(0, \pm 2)$, *d*) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) $225x^2 + 289y^2 = 65.025$. *Sol.* *a*) 17, *b*) 15, *c*) $(\pm 8, 0)$, *d*) $\frac{8}{17}$.

2. Hallar las ecuaciones de las elipses siguientes de forma que satisfagan las condiciones que se indican.

(1) Focos $(\pm 4, 0)$, vértices $(\pm 5, 0)$. *Sol.* $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

(2) Focos $(0, \pm 8)$, vértices $(0, \pm 17)$. *Sol.* $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{289} = 1$.

(3) Longitud del *latus rectum* = 5, vértices $(\pm 10, 0)$. *Sol.* $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$.

(4) Focos $(0, \pm 6)$, semieje menor = 8. *Sol.* $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$.

(5) Focos $(\pm 5, 0)$, excentricidad $= \frac{5}{8}$. *Sol.* $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$.

3. Hallar la ecuación de la elipse de centro el origen, focos en el eje x, y que pase por los puntos $(-3, 2\sqrt{3})$ y $(4, 4\sqrt{5}/3)$. *Sol.* $4x^2 + 9y^2 = 144$.

4. Hallar la ecuación de la elipse de centro el origen, semieje mayor de 4 unidades de longitud sobre el eje y, y la longitud del *latus rectum* igual a 9/2. *Sol.* $16x^2 + 9y^2 = 144$.

5. Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de distancias a los puntos fijos (3, 1) y (—5, 1) sea igual a 10. ¿Qué curva representa dicho lugar?
Sol. $9x^2 + 25y^2 + 18x - 50y - 191 = 0$, una elipse.

6. Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de distancias a los puntos fijos (2, —3) y (2, 7) sea igual a 12. *Sol.* $36x^2 + 11y^2 - 144x - 44y - 208 = 0$.

7. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo (3, 2) sea la mitad de la correspondiente a la recta $x + 2 = 0$. ¿Qué curva representa dicho lugar?
Sol. $3x^2 + 4y^2 - 28x - 16y + 48 = 0$, una elipse.

8. Dada la elipse de ecuación $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$, hallar *a*) las coordenadas del centro, *b*) el semieje mayor, *c*) el semieje menor, *d*) los focos y *e*) la longitud del *latus rectum*.
Sol. *a*) $(2, -3)$, *b*) 4, *c*) 3, *d*) $(2 \pm \sqrt{7}, -3)$, *e*) 4,5.

9. Hallar la ecuación de la elipse de centro $(4, -1)$, uno de los focos en $(1, -1)$ y que pase por el punto $(8, 0)$. *Sol.* $\frac{(x-4)^2}{18} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$, o bien, $x^2 + 2y^2 - 8x + 4y = 0$.

10. Hallar la ecuación de la elipse de centro $(3, 1)$, uno de los vértices en $(3, -2)$ y excentricidad $e = 1/3$.
Sol. $\frac{(x-3)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$, o bien, $9x^2 + 8y^2 - 54x - 16y + 17 = 0$.

11. Hallar la ecuación de la elipse uno de cuyos focos es el punto $(-1, -1)$, directriz $x = 0$, y excentricidad $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$. *Sol.* $x^2 + 2y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$.

12. Un punto $P(x, y)$ se mueve de forma que el producto de las pendientes de las dos rectas que unen P con los dos puntos fijos $(-2, 1)$ y $(6, 5)$ es constante e igual a -4. Demostrar que dicho lugar es una elipse y hallar su centro. *Sol.* $4x^2 + y^2 - 16x - 6y - 43 = 0$. Centro $(2, 3)$.

13. Un segmento AB, de 18 unidades de longitud, se mueve de forma que A está siempre sobre el eje y y B sobre el eje x. Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ sabiendo que P pertenece al segmento AB y está situado a 6 unidades de B. *Sol.* $x^2 + 4y^2 = 144$, una elipse.

14. Un arco de 80 metros de luz tiene forma semielíptica. Sabiendo que su altura es de 30 metros, hallar la altura del arco en un punto situado a 15 metros del centro. *Sol.* $15\sqrt{55}/4$ metros.

15. La órbita de la Tierra es una elipse en uno de cuyos focos está el Sol. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse es 148,5 millones de kilómetros y que la excentricidad vale 0,017, hallar la máxima y la mínima distancias de la Tierra al Sol. *Sol.* (152, 146) millones de kilómetros.

16. Hallar la ecuación de la elipse de focos $(\pm 8, 0)$ y que pasa por el punto $(8, 18/5)$.
Sol. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

17. Hallar el lugar geométrico de los puntos que dividen a las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ en la relación $\frac{1}{2}$. *Sol.* $x^2 + 4y^2 = 16$.

18. Hallar las ecuaciones de los radios focales correspondientes al punto $(1, -1)$ de la elipse

$$x^2 + 5y^2 - 2x + 20y + 16 = 0.$$

Sol. $x - 2y - 3 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$.

19. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los puntos $(0, 1)$, $(1, -1)$, $(2, 2)$, $(4, 0)$ y cuyos ejes son paralelos a los de coordenadas. *Sol.* $13x^2 + 23y^2 - 51x - 19y - 4 = 0$.

20. Hallar el lugar geométrico del centro de la circunferencia tangente a

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 6x - 27 = 0.$$

Sol. $220x^2 + 256y^2 - 660x - 3.025 = 0$ y $28x^2 + 64y^2 - 84x - 49 = 0$.